

विश्व विजेता दस

आमोद कारखानीस

प्रा चीन इजिप्ट (मिस्र) के सप्राट
फैरो का साम्राज्य काफी विशाल
था, लगभग पूरी नील नदी घाटी में
फैला हुआ। फैरो का राज्य अफ्रीका
के घने जंगल वाले इलाके से भूमध्य
सागर के उपजाऊ तटीय इलाके तक
के विशाल भू-भाग में फैला हुआ था।
ऐसा कहा जाता है कि कितना लगान
जमा हुआ, इसका हिसाब मिस्र के
राजा हर साल माँगते थे। यह हिसाब
अच्छा-खासा लम्बा-चौड़ा होता था।
वास्तव में देखा जाए तो हिसाब
इतना जटिल नहीं था लेकिन हिसाब
के अंक लिखना जरूर लम्बा-चौड़ा
काम था। उन दिनों मिस्र में संख्याओं
को लिखने का तरीका ही ऐसा था
कि बड़ी संख्याओं को लिखना खासा
मशक्कत भरा होता था।

एक इलाके में इकट्ठा हुआ लगान
यह है (चित्र-1) -

I	II	III	IV	V	VI	VII
1	10	100	1000	10000	100000	10^6

Egyptian numeral hieroglyphs

चित्र-2: मिस्र में उपयोग होने वाले विविध अंकों के लिए चिन्ह।

चित्र-3: मिस के तरीके में 528.

लिखना होता था। यह तो बड़ा लम्बा-
चौड़ा हो गया!

इस तरीके में कोई भी चिन्ह किसी भी क्रम में लिखा जा सकता था क्योंकि हरेक चिन्ह फर्क होता था। उस समय मिस्र में 10 लाख सबसे बड़ा अंक होता था। इसके लिए देवता का चिन्ह इस्तेमाल किया जाता था।

वित्र-1

अंकों को लिखने का उनका तरीका वैसे तो आसान था। 1, 10, 100, 1000 के लिए अलग-अलग चिन्ह होते थे। 528 लिखना हो तो 100 का चिन्ह 5 बार, 10 का चिन्ह 2 बार और 1 का चिन्ह 8 बार

इससे बड़े अंक वे लिखते ही नहीं थे, पता नहीं, सोचते थे कि नहीं। अंकों को लिखने का यह तरीका आसान तो था लेकिन सुविधाजनक नहीं था। इसलिए समय गुजारते वहाँ गणित की तरक्की में सीमाएँ आने लगी थीं।

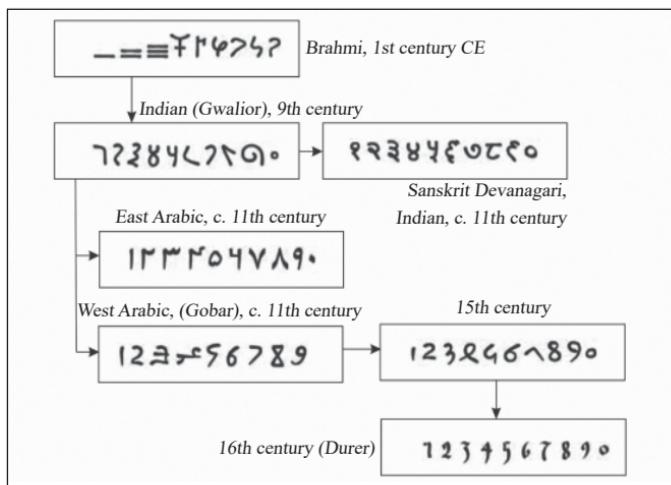
भारत में गणना का नया तरीका

मिस्र में गणित की तरक्की एक खास पड़ाव पर आकर रुक-सी गई थी। लेकिन इसी समय दुनिया के अन्य इलाकों में गणित में काफी तरक्की हो रही थी। यह दूसरा इलाका यानी भारत। चलिए, देखते हैं कि भारत में क्या चल रहा था।

मिस्र की तरह भारत में भी दस आधारित गणना की जा रही थी। यहाँ भी दस की घात वाली संख्या के लिए एक अलग नाम या शब्द इस्तेमाल होता था। जैसे दस, सौ, हजार, लाख, करोड़ वगैरह। इसका सबसे पुराना सबूत वेदों में है। शुक्लवेद संहिता में दस, सौ, हजार से लेकर दस की घात बारह (10^{12}) तक की संख्या के लिए नाम या शब्द उल्लेखित हैं।

लेकिन उस समय वेद की मौखिक परम्परा थी यानी वेदों को कण्ठस्थ करके, एक पीढ़ी से दूसरी पीढ़ी तक पहुँचाया जाता था। इसलिए अंकों को लिखा कैसे जाता था, इसके बारे में पक्के तौर पर कुछ बताया नहीं जा सकता। कुछ ग्रन्थों में 1 से 9 तक के अंकों को दर्शाने के लिए कुछ अक्षरों का इस्तेमाल किया जाता था। जैसे, 4 के लिए 'क' या 'प्क', 5 के लिए 'नृ', 6 के लिए 'ज', 'स', 'फ', 'इ' आदि।

फिलहाल हम संख्याओं के जिन चिन्हों का उपयोग कर रहे हैं, उन चिन्हों का उदगम सम्भवतः सिन्धु धाटी सभ्यता में हुआ होगा। इसके बाद के समय में ब्राह्मी लिपि में हमें इन चिन्हों का इस्तेमाल दिखाई देता है।



चित्र-4: हिन्दू-अरब अंकों का विकास।

उस समय 1 से 9 तक के अंकों के लिए फर्क चिन्हों का इस्तेमाल करना भारत की एक उल्लेखनीय पहल थी। मिस्र में इस्तेमाल होने वाले चिन्हों की तरह, हर अंक के लिए फर्क चिन्ह का भारतीय तरीका भी एक किस्म से क्रान्ति से कम नहीं था। सिर्फ मिस्र ही क्यों, दुनिया में अलग-अलग इलाकों में 5 या 8 चिन्हों वाले समूह के मुकाबले 1 से 9 के लिए विविध चिन्हों के इस्तेमाल का यह तरीका सुविधाजनक था। अब सवाल यह था कि इन 9 चिन्हों के इस्तेमाल के बाद संख्याओं को कैसे लिखा जाए?

स्थानीय मान की खोज

तो, दस लिखने के लिए हमारे पास शब्द था – दशक। लेकिन इसे अंकों में कैसे दिखाया जाए? शुरू में इसके लिए शब्दों का ही इस्तेमाल होता रहा। जैसे 235 के लिए 2 शतक, 3 दशक और 5 लिखा जाता था। इस तरीके में से ही एक नई पद्धति निर्मित हुई, वो थी – इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार वगैरह। हरेक के लिए फर्क स्थान देने की। इन जगहों को ही हम स्थानीय मान कहते हैं। इसमें अंकों को बाई और से दाहिनी ओर एक-दूसरे से सटाकर लिखते जाना होता है। उदाहरण के लिए, किसी इन्सान को ‘तीन हजार, पाँच सौ और एक’ लिखना हो तो उसे तीन हजार लिखने की ज़रूरत

सहस्र	शतक	दशक	एकक
3	5		1

चित्र-5

नहीं है। एकदम सरल तरीके से लिखने का तरीका चित्र-5 में दिखाया गया है।

यहाँ 3 का चिन्ह हजार के स्थान पर, 5 का चिन्ह सौ के स्थान पर और 1 को इकाई के स्थान पर लिखने से संख्या बन जाती है। इसे ‘अंकानां वामनो गति’ कहा जाता था। यानी अंकों को बाई ओर से लिखते जाना। अंकों को लिखने के इस तरीके को फिलहाल हम स्थानीय मान (प्लेस वैल्यू) के नाम से जानते हैं।

इसकी वजह से सारे कामकाज सरलता से होने लगे। सौ, हजार, लाख आदि शब्द तो फर्क हैं लेकिन इनके लिए नए चिन्हों की ज़रूरत नहीं होती। किसी भी संख्या को 1 से 9 तक के चिन्हों से लिखा जा सकता है। इस तरीके से, इस लेख के पहले पेज पर उल्लेखित इंजिट के एक इलाके में इकट्ठा हुआ लगान - 622743 - इस तरह से लिखा जाएगा।

शून्य से पहले का दौर

इतनी देर से हम 1 से 9 तक के चिन्हों की बात कर रहे हैं तो आपको

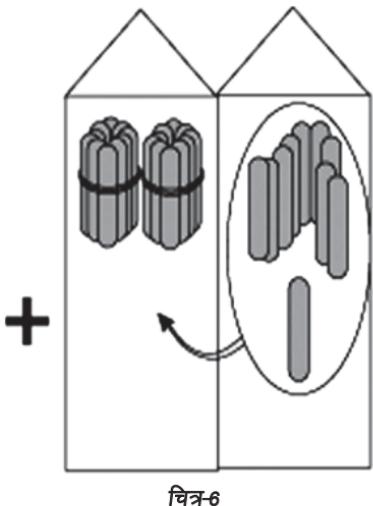
ऐसा लग सकता है कि कहीं कुछ गलत तो नहीं कह रहे हैं, चिन्ह 9 ही क्यों?

वह इसलिए क्योंकि अभी तक शून्य की खोज हुई ही नहीं थी!

स्थानीय मान का उपयोग करते हुए संख्या लिखने के तरीके में एक और बदलाव आया जिसकी वजह से गणित की कई प्रक्रियाएँ जैसे जोड़, घटा, गुणा, भाग आदि भी काफी आसान हो गईं।

मान लो, हमें $29 + 1$ की गणना करना है तो हमारे पास 9 इकाइयाँ हैं (चित्र-6)।

उसमें यदि एक इकाई और जुड़ जाए तो दस इकाइयाँ हो जाएँगी। यदि इन दस इकाइयों का एक बण्डल बनाया जाए तो एक दशक हो जाएगा। अब इसे बाईं ओर रखे दो



बण्डल के साथ रख देते हैं। इसे ही हम 'हासिल आया' भी कहते हैं। इसकी वजह से जोड़ना बहुत आसान हो जाता है।

स्थानीय मान की वजह से गुणा करना भी आसान हुआ। 10 से गुणा करना मतलब अंक को सिर्फ एक खण्ड बाईं ओर खिसकाना। यदि 20 से गुणा करना हो तो 2 का पहाड़ा मालूम होना ही पर्याप्त है। अंक को 2 से गुणा करना और जो अंक मिले, उसे एक खण्ड बाईं ओर खिसकाते जाना है। इसलिए 2 से 9 तक के पहाड़े से किसी भी दो अंकों की संख्या का गुणा सम्भव हुआ।

संख्याएँ लिखना और संख्याओं की परस्पर संक्रियाएँ आसान होने की वजह से गणित का इस्तेमाल व्यावहारिक जीवन में भी बढ़ने लगा। कर संग्रहण, नाप-तौल, व्यापार, खगोल विज्ञान – इन सभी की तरक्की का रास्ता खुलता चला गया और इस बौद्धिक तरक्की की बदौलत भारत एक नए युग की दहलीज़ तक पहुँच गया। शून्य की खोज और स्थानीय मान आधारित अंक व्यवस्था सचमुच में अत्यन्त क्रान्तिकारी परिवर्तन थे जिनपर आज की अंक पद्धति और गणितीय ढाँचा टिका हुआ है।

स्थानीय मान की वैशिक झलक

स्थानीय मान का इस्तेमाल करते हुए संख्याओं को लिखने का तरीका सिर्फ भारत में ही विकसित हुआ था,

ऐसा बिलकुल नहीं है। दक्षिण अमेरिका की माया सभ्यता में भी ऐसा ही कुछ तरीका था। वे लोग दहाई को बाई और न सरकाते हुए, एक खण्ड ऊपर सरकाते थे।

वर्तमान समय के मैक्रिस्को, होंडूरास वगैरह में 5000 ईसा पूर्व में या इससे भी पहले उष्णकटिबन्धीय जंगलों और नदी-पहाड़ के बीचों-बीच भरी-पूरी समृद्ध सभ्यता विकसित हुई। पत्थर युगीन इन्सान अब खेती करना सीख गया था। फसलों के रूप में उगाया जाने वाला यहाँ का पहला अनाज था – मक्का। उस समय का मक्का आज की तरह नरम नहीं था। उस समय इन्सान ने मक्के को उबालकर नरम करना, मक्के का आटा बनाना और उससे रोटी जैसा कुछ खाद्य बनाने का तरीका सीखा। खेती की शुरुआत के साथ इन्सान की जिन्दगी में काफी सारी तब्दीलियाँ आईं और गाँव भी बसने लगे। इन बस्तियों में अब नाप-तौल की ज़रूरत महसूस होने लगी थी, उन्हें बड़े अंक लिखने की ज़रूरत भी महसूस हो रही थी। लेकिन इसमें अभी भी एक दिक्कत थी।

यहाँ 1 के लिए एक अंगुली को मोड़कर और एक बिन्दी लगाकर दर्शाएँगे। 2 के लिए दो अंगुली और दो बिन्दी। इसी तरह 3, 4 और 5. लेकिन जब एक हाथ की पाँचों अंगुलियाँ मोड़ दी गईं तब 5 के लिए बिन्दी लगाने की बजाय एक आड़ी

लकीर खींचते हैं। ऐसे ही 6, 7, 8, 9 को दूसरे हाथ की अंगुलियों के साथ दोहराते हुए आड़ी लकीर के ऊपर क्रम से एक, दो, तीन, चार बिन्दी लगाते चलते हैं। 9 के बाद दो आड़ी लकीरें। यह दोहराव 19 तक चलता है लेकिन उसके बाद क्या...?

अंकों को लिखने का उनका तरीका इस प्रकार था –

०	●	●●	●●●	●●●●
1				
2				
3				
4				
5	●	●●	●●●	●●●●
6				
7				
8				
9				
10	●	●●	●●●	●●●●
11				
12				
13				
14				
15	●	●●	●●●	●●●●
16				
17				
18				
19				
20				●

चित्र-7: माया सभ्यता में संख्याएँ

इसके बाद के अंकों के लिए, वास्तव में 20 के लिए एक नया चिन्ह होना चाहिए। भारत और माया, दोनों संस्कृतियों में इसके बाद नया चिन्ह न बनाते हुए, स्थानीय मान का उपयोग किया गया।

लेकिन माया सभ्यता शेष दुनिया से काफी दूर और अटलांटिक और प्रशान्त महासागर जैसे विशाल समुद्र की वजह से अलग-थलग थी। दूसरी बात, उनके पास इकाई अंकों के लिए अलग-अलग चिन्ह नहीं थे और यह एक 20 आधार वाली पद्धति थी। इस

पद्धति का 10 मतलब हमारे तरीके का 20 और उनका 20 मतलब हमारा 40 हुआ। 20 आधार वाली गणना के मुकाबले 10 आधार वाली गणना ज्यादा आसान और सुगम थी।

इसी तरह अन्य सभ्यताओं में भी अलग-अलग आधार पर अंक पद्धतियाँ विकसित हुई थीं। जैसे माया सभ्यता में 20 पर आधारित पद्धति थी, वैसे ही सुमेरियन पद्धति में आधार 60 था, और मेसोपोटामिया में आधार 12 इस्तेमाल होता था।

विश्व विजेता दस

दुनिया में ऐसी कई तरह की पद्धतियाँ प्रचलन में होने की वजह से व्यापार में किस तरह की चुनौतियाँ पेश आती होंगी, इसकी आप सिफ कल्पना ही कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए एक भारतीय मेसोपोटामिया के बाजार में घूम रहा है। मेसोपोटामिया में आधार 12 का इस्तेमाल होता है और हिन्दुस्तानी इन्सान को इसके बारे में मालूम नहीं है। उसकी निगाह एक खूबसूरत हार पर जाकर रुक जाती है, वह उसे खरीदना चाहता है।

वह दुकानदार से पूछता है, “इस हार का दाम क्या है?”

आमोद कारखानीस: पेशे से कम्यूटर इंजीनियर। लेखन एवं चित्रकारी का शौक। मुम्बई में रहते हैं।

मराठी से अनुवाद: माधव केलकर: संदर्भ पत्रिका से सम्बद्ध हैं।

दुकानदार बताता है, “21 मुद्रा!”

हिन्दुस्तानी कहता है, कोई बात नहीं, सस्ता ही है और 10 आधार पद्धति के मुताबिक 21 मुद्राएँ दुकानदार को दे देता है।

मेसोपोटामिया का दुकानदार कहता है, “महाशय, मैंने आपको 21 मुद्रा बताया है। आपने मुझे 4 मुद्राएँ कम दी हैं।”

“नहीं तो, मैंने अच्छे से गिनकर इकीस मुद्राएँ दी हैं।”

“नहीं जी, देखिए, ये उन्नीस मुद्राएँ ही हैं।”

यह फर्क इसलिए आया क्योंकि 10 आधार पद्धति का 21 मतलब मेसोपोटामियाई 12 आधार पद्धति का 19 हुआ।

दुनियाभर में जिस तरह से व्यापार बढ़ रहा था, उसमें इस तरह की विसंगतियाँ या चुनौतियाँ भी बढ़ती जा रही थीं। इस तरह तो नहीं चल सकता था। व्यापार में जिस तरह सामग्रियों का आदान-प्रदान हो रहा था वैसे ही गणितीय संकल्पनाओं का लेन-देन भी बढ़ रहा था। इन सब के साथ-साथ धीरे-धीरे दस आधार वाली पद्धति दुनियाभर में मान्यता प्राप्त करती चली गई।