ख्वारिज़्म और उनका अलज़ाब्र

आमोद कारखानीस

बचपन में कहानियों की किताबें पढ़ना एक अत्यन्त रुचिकर शगल होता था। उसमें भी यदि किताब रहस्य-रोमांच की हो तब तो उत्साह बेहिसाब हो जाता था! ऐसी किताबों में एक किताब जो सदैव रोमांचित करती थी, वो थी – *अरेबियन नाइट्स।* उसमें रोमांचित करने वाली कहानियाँ और खलीफा हारुन अल-रशीद द्वारा भेष बदलकर अपनी रियासत में घूमना बेहद मज़ेदार लगता था। *अरेबियन नाइट्स* की कहानियाँ काल्पनिक होने के बाद भी उसका एक प्रमुख किरदार, हारुन अल-रशीद सचमुच में बगदाद का खलीफा हुआ करता था। सन् 700-800 के बीच वो बगदाद का शासक था। अभी हम जिस किस्से को बयान करने वाले हैं, वह कहानी भी उसी कालखण्ड में बगदाद में घटित हुई थी।

वह दौर अरब साम्राज्य का स्वर्णकाल था, जब अरब साम्राज्य पूरब में सिन्ध से लेकर पश्चिम में यूरोप तक फैला हुआ था। खलीफा हारुन अल-रशीद और उनके बाद के शासक क्षमतावान और दूरदृष्टि रखने वाले थे। उस दौरान बगदाद को कला, विज्ञान, संस्कृति और साहित्य के क्षेत्र में दुनिया का प्रमुख केन्द्र बनाने के प्रयास शुरू हो गए थे। इसके लिए भारत, इजिप्त, ग्रीस, रोम आदि के अनेक ग्रन्थों के फारसी भाषा में अनुवाद को प्रोत्साहित किया गया। अलग-अलग देशों के विद्वान बगदाद में आकर रहने लगे थे और शोध एवं अध्ययन-अध्यापन जैसे काम करने लगे थे। ऐसे विद्वानों में एक नाम अल-ख्वारिज़्मी का भी था। ऐसा अनुमान है कि ख्वारिज़्मी की पैदाइश वर्तमान उज़्बेकिस्तान में हुई थी। उसका पूरा नाम मुहम्मद इबन मूसा अल-ख्वारिज़्मी था। उसकी शौहरत के किस्से सुनकर खलीफा ने उसे बगदाद आमंत्रित किया था। ख्वारिज़्मी बगदाद आए और कुछ ही समय में वहाँ रम गए। सन् 850 के आसपास वे खलीफा हारुन अल-रशीद द्वारा स्थापित 'हाउस ऑफ विज़्डम' के संचालक भी बने थे।

कला और ज्ञान का केन्द्र

चलिए, उस दौर के बगदाद में चलते हैं। गुम्बदों वाली छतों से सजी हुई बहुरंगी इमारतें, भीड-भाड़ वाले बाज़ार, चीन, भारत, यूरोप और इजिप्त जैसे कई देशों से आने वाली सामग्री, अनाज, फल, हीरे और इनकी

खरीद-फरोख्त – ऐसा सम्पन्न था बगदाद।

सिर्फ व्यापार ही नहीं, कलाकारों के लिए भी बगदाद के दरवाज़े हमेशा खुले रहते थे। उस समय बगदाद में रेखागणितीय आकारों पर आधारित टाइल्स काफी मशहूर हो चली थीं। कला की तरह ही वहाँ ज्ञान को भी काफी सम्मान प्राप्त था। इसलिए हर महीने किसी तयशुदा दिन विद्वानों की सभा का आयोजन भी होता था, जिसमें अलग-अलग विषयों पर नए विचार एवं नए ग्रन्थ सबके सामने प्रस्तुत किए जाते थे।

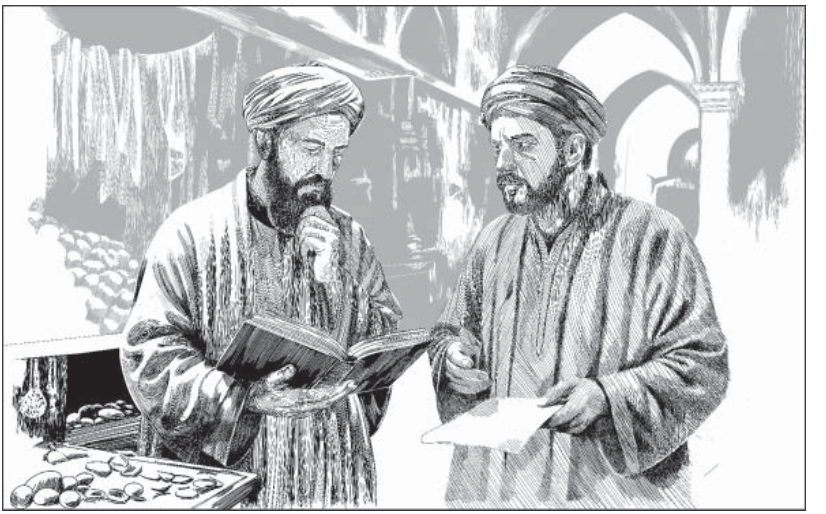
भारत से आया ज्ञान का सन्देश

उस दिन भी सभा में ऐसा ही कुछ घटा था। भारत से आए हुए कनक नामक खगोलविद् ने ब्रह्मगुप्त का कण्ठस्थ किया हुआ ग्रन्थ सबको सुना दिया। उस सभा में ख्वारिज़्मी भी मौजूद था। ग्रन्थ का पाठ सुनकर उनकी आँखें खुल-सी गईं। वो बाएँ हाथ से अपनी दाढ़ी पर हाथ फेरने लगे। यह उनकी आदत भी थी, जब कभी वे गम्भीरतापूर्वक सोचने लगते तो हाथ खुद-ब-खुद दाढ़ी पर चला जाता था। ऐसे ही एक दिन खलीफा ने उनसे पूछा था कि दुनियाभर के

मुसलमानों को रेगिस्तान या समुन्दर में सफर के दौरान नमाज़ पढ़ने के लिए मक्का की वास्तविक दिशा मालूम करनी हो तो वे कैसे पता करेंगे, इसके लिए कोई तरीका बताओ। तब भी ख्वारिज़्मी ने ऐसे ही दाढ़ी पर हाथ फेरना शुरू कर दिया था। हालाँकि, उन्होंने और उनके शागिर्दों ने मिलकर पूरे अरब साम्राज्य के अलग-अलग इलाकों के लिए, अलग-अलग समय आसमान में दिख रहे तारा समूहों के नक्शे बनाए थे। इसके लिए सारी गणितीय संक्रियाएँ एवं जटिल गणनाएँ, सारा कुछ ख्वारिज़्मी ने खुद भी ध्यान देकर किया था।

अभी-अभी कनक ने ब्रह्मगुप्त का जो ग्रन्थ सुनाया, उसे सुनकर वे खासे प्रभावित हो गए थे। यह स्पष्ट था कि भारतीय अंक, अंक लेखन का तरीका, भिन्न के नियम, बीज गणित, त्रिकोणमिति आदि – इन सभी क्षेत्रों में भारतीय काफी आगे थे। इस ग्रन्थ का केवल अनुवाद करके काम नहीं चलने वाला। इस ग्रन्थ को सरल भाषा में समझाकर बताना चाहिए और इसे सभी तक पहुँचाना होगा, ख्वारिज़्मी ऐसा सोचने लगे थे।

इस सोच को आगे बढ़ाते हुए उन्होंने *अल-जन वाल तफरीक बी हिसाब अल-हिन्द* यानी *भारत के गणित में जोड़ना और घटाना* ग्रन्थ की रचना की। बाद में, इसका लेटिन भाषा में *Algorithm de numero indoram* शीर्षक से अनुवाद किया गया। इस ग्रन्थ में भारतीय अंक पद्धति का इस्तेमाल करते हुए जोड़ना, घटाना, गुणा और भाग कैसे किए जा सकते हैं, इसके



विविध तरीके दिए गए हैं। इसी तरीके से गणित को पायदान-दर-पायदान (स्टेप-बाई-स्टेप) बताने के लिए एल्गोरिदम शब्द प्रचलन में आया। वर्तमान समय में कम्प्यूटर एल्गोरिदम भी उसी का एक रूप है। इस किताब की वजह से भारतीय अंक और अन्य गणितीय अवधारणाओं का यूरोप में फैलाव हुआ।

रस्सी से नपाई वाले - सर्वेयर

बीज-गणित ख्वारिज़्मी का पसन्दीदा विषय था। विशेषकर अज्ञात राशियों वाले कूटप्रश्न (अर्थात् आज के बीजगणितीय समीकरण) उनका सबसे प्रिय विषय थे। एक दफा वे अपने शागिर्दों को बता रहे थे कि ये द्विघात समीकरणों वाले सवाल सिर्फ गणितज्ञों की समस्या के समाधान के लिए ही नहीं हैं, इनका इन्सानी ज़िन्दगी में भी उतना ही इस्तेमाल है। वे आगे बताते हैं कि मैंने प्राचीन मिस्र के कुछ ग्रन्थ पढ़े हैं। उस समय वहाँ के राजा नील नदी के उपजाऊ इलाकों के एकसमान चौकोन भूखण्ड लोगों को खेती करने के लिए देते थे। परन्तु भूखण्ड की सीमा निर्धारित करने वाले खम्बे हर साल बाढ़ में नष्ट हो जाते थे। राजा के सर्वेयर जिन्हें उस दौर में 'रस्सी से नपाई वाले' (Harpendonapati) कहा जाता था, हर साल दोबारा ज़मीन की नापजोख करके उपजाऊ ज़मीन का फिर से बँटवारा कर देते थे। इन सर्वेयर को उस समय बहुत इज़्ज़त दी जाती थी। उनको इतनी इज़्ज़त मिलना वाजिब भी था क्योंकि ये लोग गणित में माहिर थे। उन्हें ऐसे द्विघात समीकरण हमेशा ही हल करने पड़ते थे। उदाहरण के लिए मान लीजिए - किसी एक किसान को पिछले भूखण्ड रिकॉर्ड के मुताबिक 96 खेत (एक इकाई) भूखण्ड देना है। इसमें से उसे एक वर्गाकार टुकड़ा और इस वर्ग से सटा हुआ 12 इकाई का टुकड़ा घर के लिए देना है। तो पता करना है कि वर्ग की भुजा क्या होगी।

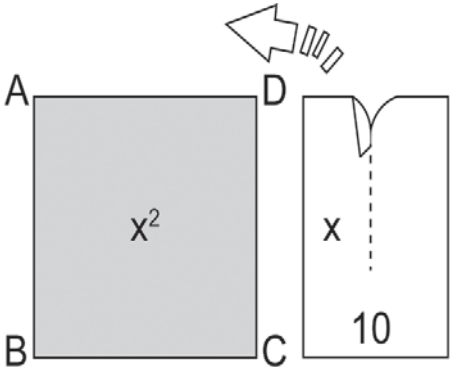
आज की गणितीय भाषा में यदि उस वर्ग की भुजा X है तो, $X^2 + 12X = 96$, यह समीकरण बनेगा जिसे हल करना है।

उस समय इजिप्त में इसे हल करने के लिए एक तरीका उपलब्ध था। लेकिन ब्रह्मगुप्त के ग्रन्थ में ऐसे सवालों को हल करने के लिए कई तरीके बताए गए थे। बाद में ख्वारिज़्मी ने इन सबका अध्ययन करके द्विघात समीकरणों को छह किस्मों में रखा और हरेक को हल करने के तरीके बताए। साथ ही, उन्हें रेखागणितीय आकृतियों में तब्दील करने और विज़ुअल स्वरूप देने की कोशिश की। इसे एक उदाहरण से समझते हैं।

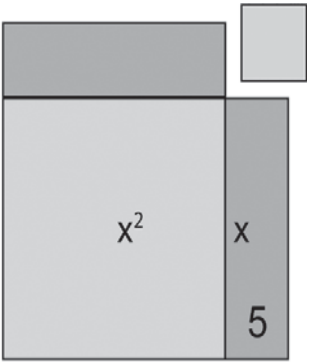
एक समीकरण है,

$X^2 + 10X + 21 = 0$

चित्र-1 में मान लीजिए, AB = X है तो ABCD वर्ग का क्षेत्रफल X^2 हुआ।



चित्र-1



चित्र-2

ख्वारिज़्मी बताते हैं कि अगले पद यानी 10X के दो हिस्से किए मतलब 5X + 5X और इससे हमें 5 एवं X लम्बाई-चौड़ाई वाले दो आयत मिले। इन्हें वर्ग की दो भुजाओं से सटाते हैं। इस तरह चित्र में दिखाए मुताबिक रचना प्राप्त हो गई है। चित्र-2 में (X+5 लम्बाई-चौड़ाई वाला) वर्ग पूरा करने के लिए 5 x 5 = 25 आकार का चौकोन और जोड़ना पड़ेगा। यदि समीकरण के तीसरे पद 21 में से 25 को निकाल दें तो (-4) बचेगा। 4 का वर्गमूल निकाला जाए तो हमारा समीकरण होगा,

$(X+5)^2 - 2^2 = 0$

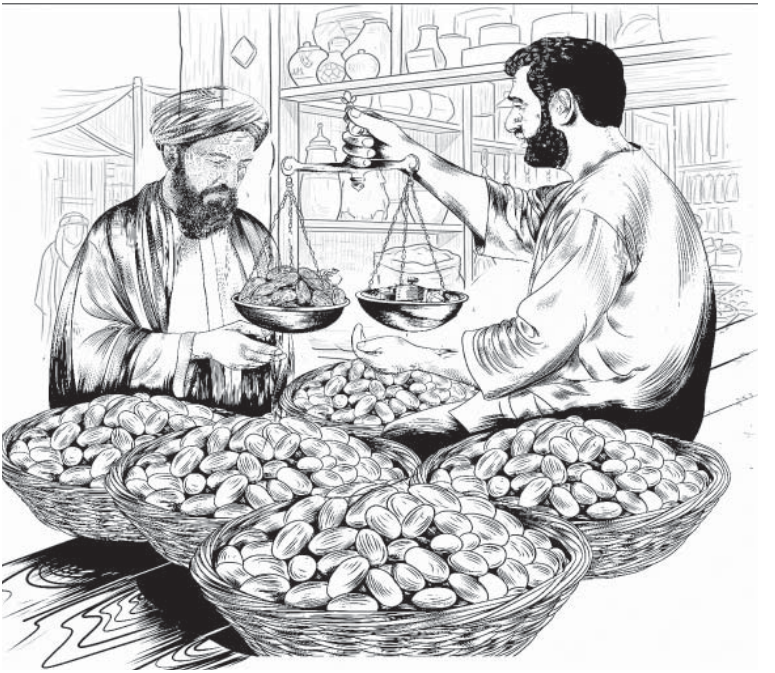
$a^2-b^2 = (a+b) \times (a-b)$, इस समीकरण को हल करना हमारे लिए अब सम्भव हो गया है।

हमारी पाठ्यपुस्तकों में द्विघात समीकरणों को हल करने के तरीकों में यह तरीका भी शामिल रहता है। इसे हम वर्ग पूरा करने का तरीका कहते हैं।

बाज़ार का एक दिलचस्प अनुभव

ख्वारिज़्मी के दौर में अज्ञात मान के लिए किसी अक्षर को रखकर गणनाएँ करने का तरीका विकसित नहीं हुआ था। इसलिए ऐसे अज्ञात मान को मालूम करने का तरीका लम्बा और जटिल हो जाता था। उन्होंने वर्गीकरण की जो कोशिश की, उसकी वजह से थोड़ी सुगमता तो मिली, फिर भी बहुत-सी अन्य दिक्कतें तो बची ही थीं।

एक दिन, हमेशा की तरह ख्वारिज़्मी अपने शागिर्दों के साथ बैठे थे। उनके पास एक थैली भी थी जिसमें अरब के उम्दा खजूर थे। उन्होंने जोश-जोश में बताया कि "आज तो मज़ेदार वाकिया हुआ। मैं बाज़ार में खजूर खरीदने के लिए



गया था। मुझे जितना खजूर चाहिए था, उस वज़न का बाँट दुकानदार के पास नहीं था। उसके पास थोड़ा ज़्यादा वज़न का बाँट था। अब जितना खजूर चाहिए, उतना किस तरह तौला जाए? इसके समाधान के लिए हमने जहाँ खजूर रखे थे, तराज़ू के उस पलड़े में भी एक कम वज़न का बाँट रखा ताकि दोनों पलड़े सन्तुलित हो जाएँ। जितना वज़न खजूर के पलड़े में रखा, उतना वज़न बाँटों वाले पलड़े से कम कर दिया।"

"ध्यान दीजिए, यही तरीका हमें समीकरणों को हल करते समय भी अपनाना चाहिए। वास्तव में, हमने हल करने की जिन विधियों को लिखा है, वे सब ऐसे ही तरीके से सवालों को हल करती हैं। देखिए, इस गणित में दो पक्ष हैं इसलिए जो भी करना है, वो दोनों पक्षों के साथ समान रूप से करना है। यदि एक पक्ष को दो से भाग दिया, तो दूसरे पक्ष को भी दो से भाग देना होगा।"

वर्तमान गणित की भाषा में, किसी समीकरण के दोनों पक्षों पर समान क्रिया करने पर समीकरण सन्तुलित रहते हैं। उस समय की फारसी भाषा में इसे 'अलज़ाब्र' शब्द से जाना

यह चित्र इंटरनेट से साभार

चित्र-3: *8वीं शताब्दी में किताब 'अलकिताब अलमुक्तसर फी हिसाब अलज़ाब्र वलमुकाबला' का पुनर्मुद्रण हुआ था।*

जाता था जिसका अर्थ था पुनर्सन्तुलन (restoration)। यानी समीकरण सन्तुलित रहे इसलिए समीकरण के एक पक्ष में जितना जोड़ा या घटाया जा रहा है, उतना ही दूसरे पक्ष में जोड़ा या घटाया जाए।

यह समीकरणों को हल करने की तार्किक पद्धति का जन्म था। ख्वारिज़्मी ने यह सभी बातें अपनी किताब *अलकिताब अलमुक्तसर फी हिसाब अलज़ाब्र वलमुकाबला* में लिखी हैं।

किताब के नाम में मौजूद 'अलज़ाब्र' शब्द से ही बीजगणित के लिए अँग्रेज़ी नाम अलज़ेब्रा निकलकर आया।

आमोद कारखानीस: पेशे से कम्प्यूटर इंजीनियर। लेखन एवं चित्रकारी का शौक। मुम्बई में रहते हैं।

मराठी से अनुवाद: माधव केलकर: *संदर्भ* पत्रिका से सम्बद्ध हैं।

सभी चित्र: मणिपद्मा हर्षवर्धन: आर.एस.जी. कलानिकेतन महाविद्यालय, कोल्हापुर, महाराष्ट्र में सहायक प्रध्यापक हैं। लगभग 12 वर्षों का शिक्षण अनुभव। शैक्षणिक ज़िम्मेदारियों के साथ-साथ, ग्राफिक्स और वाणिज्यिक विज्ञापन डिज़ाइनिंग में उल्लेखनीय व्यावहारिक विशेषज्ञता रखती हैं।