सूडोकू पहेली का रोचक गणित

एस. अनंतनारायणन

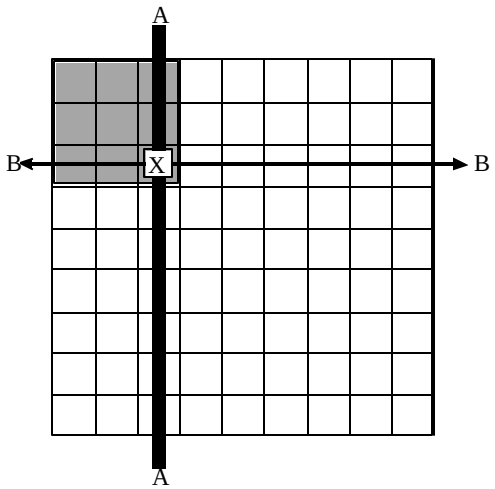
सूडोकू पहेली मनोरंजक होने के साथ-साथ बहुत कुछ और भी हैं। पहेलियां न्यूनतम संसाधन में अधिकतम हासिल करने की जटिल समस्याओं का रूप होती हैं। इस तरह की समस्याओं का सामना टेक्नॉलॉजीविद, प्रबंधक, शाला प्रधान वगैरह रोज़ाना करते हैं।

सूडोकू एक पहेली है जिसमें कतिपय नियमों का पालन करते हुए 9x9 के वर्ग में 1 से 9 तक की संख्याएं भरनी होती हैं। इसको भरने का पहला नियम यह है कि कोई भी संख्या एक पंक्ति या एक कॉलम में एक ही बार आनी चाहिए। दूसरा नियम यह है कि बड़े वर्ग के अंदर बने छोटे-छोटे 9x9 उपवर्गों में भी प्रत्येक संख्या एक ही बार आनी चाहिए। दोनों नियम चित्र में स्पष्ट किए गए हैं।

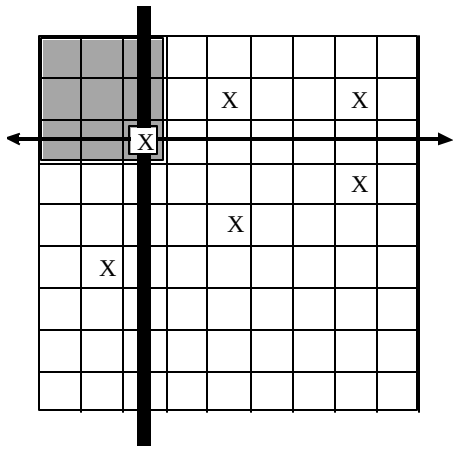
जैसे ही सूडोकू खिलाड़ी कोई भी एक संख्या इसमें भरता है, तब वह उससे सम्बंधित पंक्तियों, कॉलमों और उपवर्गों को बंद देता है। इसके बाद बची हुई संख्याओं को भरने के लिए खाली स्थान ढूंढना और मुश्किल हो जाता है। सूडोकू दिमाग को पचाने वाला बेजोड़ खेल है। कहते हैं कि कई बड़े-बड़े अखबारों में यह लोगों के लिए मन बहलाने का सबसे लोकप्रिय साधन बन गया है, और हैरत की बात यह है कि सूडोकू से चिपके अधिकांश लोगों में गणितीय रुझान नहीं है।

मगर गणितज्ञ इससे दूर नहीं रहे। कनाडा में स्थित क्वीन्स यूनिवर्सिटी के प्रोफेसर एजनेस एम. हर्ज़बर्ग और एम. राम मूर्ति के शोध पत्र हाल ही में जर्नल ऑफ अमेरिकन मेथेमेटिकल सोसायटी में प्रकाशित हुए हैं। इस पर्चे में उन्होंने उन सवालों पर गौर किया है जिन्होंने सूडोकू-लतियों की रातों की नींद हराम कर रखी है।

कनाडा की इस जोड़ी से पहले भी अन्य गणितज्ञों ने पहचान लिया था कि सुडोकू लेटिन वर्ग का ही एक प्रकार है, जहां 9x9 ग्रिड में किसी पंक्ति या कॉलम में प्रत्येक संख्या एक ही बार आना चाहिए। इस नियम से चलें तो कुल 5, 524, 751, 496, 156, 892, 842, 531, 225, 600 लेटिन वर्ग बनाए जा सकते हैं। यानी 5 खरब खरब खरब से भी ज़्यादा। यह सही है कि सूडोकू वर्ग में एक



AA कॉलम या BB पंक्ति में या मटमैले वर्ग के किसी खाने में संख्या X नहीं आ सकती।



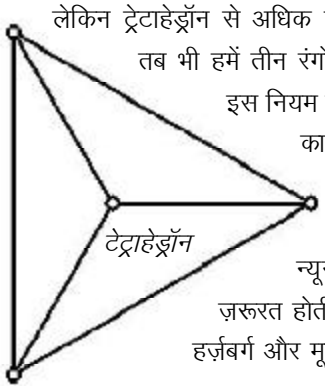
कुछ अन्य खाने भर देने पर कुछ और खानों में संभावित संख्याएं सीमित हो जाती हैं।

और भी शर्त है। इसीलिए सभी लेटिन वर्ग सुडोकू वर्ग नहीं होते। बर्ट्रैम फेल्जेनहावर और फ्रेज़र जार्विस ने 2005 में यह साबित किया था कि वास्तविक सूडोकू वर्गों की संख्या 6, 670, 903, 752, 021, 072, 936, 960 यानी 600 करोड़ करोड़ करोड़ से ज़्यादा होगी। अर्थात सूडोकू वर्गों की संभावित संख्या लैटिन वर्गों की संभावित संख्या का दस लाखवां भाग है और इसीलिए सूडोकू पहेली को हल करना कहीं अधिक मुश्किल काम है।

पहेली बनाने वाला कुछ संख्याएं पहले से भर देता है। जिनकी वजह से संभावित हलों की संख्या कम हो जाती है और पहेली थोड़ी आसान हो जाती है। मगर कभी-कभी पहेली हल करने वाले सोचने लगते हैं कि कहीं बनाने वाले ने कोई गलती तो नहीं कर दी और कहीं ऐसा तो नहीं कि इस पहेली का कोई हल ही न हो। दूसरी ओर, गणितज्ञ सोचते हैं कि प्रत्येक भरी गई संख्या संभावित हलों की संख्या को कम करती है तो कम से कम कितनी संख्याएं पहले से भर दी जाएं कि पहेली का एक ही हल संभव हो।

रंगीन ग्राफ

आधुनिक गणित में ग्राफ बिंदुओं के एक समूह और उन बिंदुओं को जोड़ने वाली रेखा को कहते हैं। चतुष्फलक (ट्रेटाहेड्रान, देखें चित्र) में 4 शिखर हैं और प्रत्येक शिखर पर तीन किनारे मिलते हैं। अब यदि हम एक नियम बनाएं कि एक ही रंग के शिखर एक-दूसरे से नहीं जुड़ने चाहिए, तो स्पष्ट है कि टेट्राहेड्रॉन में हमें 3 अलग-अलग रंगों की ज़रूरत पड़ेगी, क्योंकि प्रत्येक शिखर बाकी सबसे जुड़ेगा। लेकिन ट्रेटाहेड्रॉन से अधिक पेचीदा चित्रों को देखेंगे तब भी हमें तीन रंगों की ही ज़रूरत होगी। इस नियम को हम उपयुक्त कलरिंग का नियम कहेंगे। रोचक बात यह है कि हम यह पता कर सकते हैं कि न्यूनतम कितने रंगों की ज़रूरत होती है।


टेट्राहेड्रॉन

हर्ज़बर्ग और मूर्ति ने सुडोकू के नेटवर्क को ग्रॉफ मानकर विचार किया। प्रत्येक अंक उसी पंक्ति के अन्य 8 अंकों से, कॉलम के 8 अंकों से और उपवर्गों के 8 अंकों से जुड़ा होता है। और इस तरह जुड़ा हुआ कोई भी अंक किसी अन्य के समान नहीं हो सकता। यह उसी बात को कहने का दूसरा ढंग है कि कोई भी दो पास-पास के शिखर एक ही रंग के नहीं हो सकते!

सूडोकू और ग्राफ की इस समरूपता को स्थापित करने से ग्राफ के ज्ञान का उपयोग सूडोकू के अध्ययन में करना संभव हो गया और कई समस्याओं का समाधान गणितीय विधियों द्वारा किया जा सका। उदाहरण के लिए, ग्राफ सिद्धांत में यदि एक निश्चित संख्या में शिखरों को रंगों की एक निश्चित संख्या से रंगना हो तो जितने तरीके से इस काम को किया जा सकता है, वह कुछ हद तक शिखरों और रंगों की संख्या पर निर्भर करता है।

अब हर्ज़बर्ग और मूर्ति ने यह साबित कर दिया है कि यदि आंशिक रूप से शिखरों में रंग भर दिए गए हैं, तो बाकी काम को कुछ और रंगों की मदद से कितनी तरह से पूरा किया जा सकेगा, यह भी रंगों और शिखरों की संख्या पर निर्भर करता है।

इस विश्लेषण से पता चलता है कि किसी आंशिक रूप से भरे हुए सूडोकू वर्ग में प्रत्येक संख्या को एक रंग माना जा सकता है और यह देखा जा सकता है कि उसे पूरा भरने के कितने ढंग हो सकते हैं। हर्ज़बर्ग और मूर्ति ने बताया कि यदि सूडोकू में कुछ संख्याएं इस तरह भरना हो कि उसका एक ही हल निकले तो ऐसी संख्याओं की तादाद 17 से कम नहीं होगी। अर्थात कम से कम 17 संख्याएं भर देने के बाद ही सूडोकू इकलौते हल वाला बन जाता है। अभी यह साफ नहीं है कि यदि 16 जगहों पर ही संख्याएं भरकर दी जाएं, तो क्या उसको भरने का तरीका भी एक ही होगा। वैसे यह गणना की गई है कि 17 जगहों पर संख्याएं भरी हों, तो सूडोकू के 36,000 से भी ज़्यादा अलग-अलग उत्तर मिल सकेंगे।

अखबारों में जो सुडोकू दिए जाते हैं उनमें अक्सर 24 जगहों पर अंक भरे होते हैं ताकि हल करने वालों के लिए आसानी हो। इनमें बहुत कम जगहें ही खाली होती हैं और

असफलता की संभावना बहुत कम होती है।

दरअसल, सुडोकू पहेली ग्राफ कलरिंग की ही पहेली है और यह ज़िंदगी की योजना या कार्यक्रम बनाने की भी पहेली है।

जैसे यदि दो समितियों में कोई एक कॉमन मेम्बर हो तो, समितियों को जोड़ना, एक ही समय पर (एक ही रंग) मीटिंग कराना आदि बहुत मुश्किल हो जाता है। ऐसी दो समितियों की बैठक एक ही समय पर नहीं हो सकती, लेकिन दो स्वतंत्र समितियों की बैठक एक साथ हो सकती है। या जैसे टीवी चैनलों की फ्रिक्वेंसी निर्धारित की जाती हैं। यदि वे एक-दूसरे से कुछ ही दूरी पर हों, तब उन्हें अलग फ्रिक्वेंसी की आवश्यकता होगी। यदि कुछ ऑपरेटरों के लिए पहले से ही फ्रिक्वेंसी निर्धारित हैं, तब नए चैनलों को फ्रिक्वेंसी देने के लिए आंशिक रंगीन ग्राफ के रूप में या आंशिक रूप से भरे हुए सूडोकू वर्ग के रूप में सोचना होगा। ***(स्रोत फीचर्स)***